

# 柏サイエンスキャンプ 量子力学を体感する

勝本信吾, 中村壮智, 橋本義昭

2018年2月4日

## 目次

1	序：量子効果は目で見えるか？	1
1.1	量子力学は難しいか	1
1.2	波動力学	2
1.3	量子と「観測」	3
1.4	電気伝導	4
2	超伝導現象	4
2.1	超伝導とはどんな状態か	4
2.2	Josephson 接合	5
2.3	超伝導量子干渉素子 (SQUID)	7
3	半導体超構造	10
3.1	2重障壁構造	10
3.2	量子 Hall 効果	12
4	本プログラムで行う実験	14
4.1	2重障壁ダイオードの電流電圧特性	14
4.2	Josephson 接合 (あるいは弱結合) 素子を使った実験	15
4.3	量子 Hall 効果	15

このテキストは、2018年柏サイエンスキャンプの「量子力学を体感する」のための解説です。このテーマは、小学校の理科以来なじみのある「電気抵抗」(あるいはその逆数「電気伝導度」)に量子力学的な効果が現れることを実験で見ってもらうことを目的としています。サイエンスキャンプ本番前に目を通していただければ、より理解が進むと思います。

## 1 序：量子効果は目で見えるか？

### 1.1 量子力学は難しいか

このプログラムは、量子力学があたかも目で見えるように、実験で体感していただきたい、ということで企画しました。もちろん、量子力学が何か、というような予備知識はなしで、でも、どんなものなのか感じていただくことをねらいとしています。

我々の身の回りに起こる物理現象を量子力学なしで今日のレベルで科学的に理解することは、ほぼ不可能と言っても良いでしょう。しかし一方、量子力学自身がとてもわかりやすいものか、と聞かれると、答えに窮します。という

のも、最も難しい問いがこの「量子力学は難しいかやさしいか」であると思うからです。

まず、量子力学を使いこなして現実の物理現象を解明したり、予言したりするためには高度で難しい数学を要します。しかし、それは古典力学とて同じことであり、量子力学だけ特別に難しい、ということにはなりません。実際、ごく初等的なレベルの理解を得るのはそれほど難しいことではありません。が、その意味するところを色々と考えると、Einstein と Bohr の論争のように次第に難解になり、更には Feynman をして、量子力学を本当の意味で理解している人間はだれ一人いない、と言わしめるレベルになってしまいます。今日量子情報科学は極めて抽象度の高いレベルに達しながらも、観測論や測定の問題も同時に考えていこうとしています。

脱線しました。このプログラムでは、当然そんな高いレベルの話を考えるのではなく、ごく初等的レベルの量子力学も実験を通して取りつきやすくしよう、というものです。初等レベルでも取りつきにくいところがあるとすれば、やはり、対象が直接目で見えない、というところでしょう。では、「量子力学を体感する」ようなことは可能でしょうか。皆さんと一緒にチャレンジしてみたいと思います。

## 1.2 波動力学

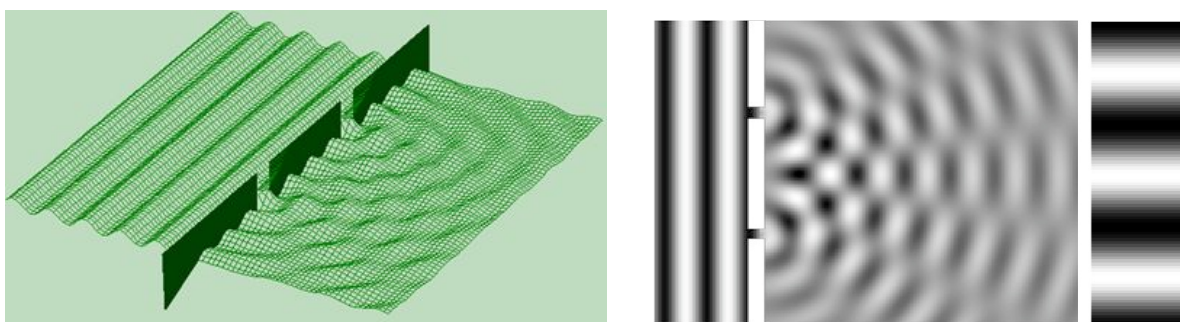
皆さんは、駒場の2学期ですでに「振動・波動」の類の勉強をされていると思います。これは初等量子力学の理解の上では大変有利なことです。というのは、様々な量子力学の記述形式の中でも見かけは比較的直観に近い Schrödinger 形式は「振動・波動」でおなじみの「波動関数」と、その時間発展を記述する偏微分方程式で与えられるからです。・・と言ってもここで微分方程式の解法にチャレンジ、はいたしません。

実空間内 (座標  $\mathbf{r}$ ) の波動を表す波動関数  $f(\mathbf{r}, t)$  ( $t$  は時間) は、複素数で表すと、振幅を表す実数  $A(\mathbf{r}, t)$  と位相  $\theta(\mathbf{r}, t)$  を使って、

$$f(\mathbf{r}, t) = A(\mathbf{r}, t) \exp[i\theta(\mathbf{r}, t)] \quad (1)$$

と書くことができます。Schrödinger 形式の量子力学では、電子のような素粒子をはじめ、ありとあらゆる力学的自由度は (1) のような波動関数で記述される、というのです。「波動力学」(wave mechanics) という別称を与えられている所以でもあります。

ここで出てくるのが、例の「粒か波か」という問題です。上の言い方では、「粒」だけではなく、それ以外の様々な自由度、コイルの中の磁束だとか、電極の中の電荷量、車の重心・・・何でもかんでも森羅万象が波動だ、というわけで、『何もかも』か波かということになりましょうか。が、本プログラムでは電気抵抗 (伝導) に現れる量子効果、を考えますので、固体の中で最も動きやすい荷電粒子で多くの物質での電気伝導を担っている、素粒子の1つである電子を唯一の対象としましょう。



(a)

(b)

図1 水面波を使った2重スリット実験の模式図。(a) 3次元ワイヤフレームで表示した2重スリット実験。(b) 上部から2重スリットを通る波を白黒濃淡プロットで示したもの。右端は、波の振幅を白黒濃淡プロットしたもの。

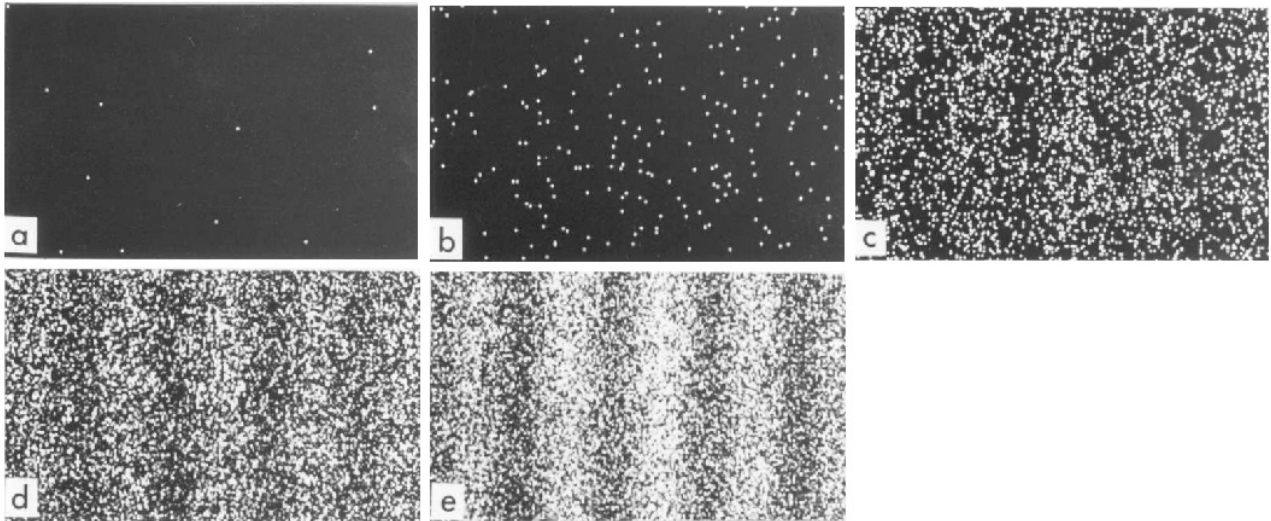


図2 電子線の強度を非常に絞って行った二重スリット実験結果. 干渉スクリーン上で露光時間を変えながら干渉パターンを撮影したもの. a → e の順に露光時間を長くしている. (提供: 日立製作所, 外村彰博士)

### 1.3 量子と「観測」

そこで、電子について「粒か波か」の問題をしてみることにしましょう。何だか良くわからないけれども空間を飛んでくるもの、伝わってくるものがあったとして、「これは波動である」と言うためには、どうすれば良いでしょうか。

そのための典型的な実験が、図1の2重スリット実験です。図1(a)は水面波のような波についてのイラストですが、もちろん、波なら何でもよいわけです。波を消してしまう波消し板(電子だったら遮蔽板)に2か所だけスリットを開けておきます。ここに何だかわからないもの(実は波動)を入射させます。波消し板の後方にはこの何だかわからないものが「そこに来た」ということがわかるようなスクリーンを置いておきます。何だかわからないものが、もし波動であれば、図1(b)のように、2つのスリットを通った波が干渉してスクリーン上に干渉縞ができるはずですが、

ここで有名な実験の結果をお見せしましょう(図2)。日立製作所にいらした外村彰博士の実験 [1] で、2002年のPhysics World誌の読者による投票で、「最も美しい実験」に選ばれたものです。実験の詳細(ここが実は凄いのですが)は略しますが、要するに、電子線に対する2重スリット実験です。電子が数えるほどしか飛んできていない、aでは、スクリーン上にポツポツと点状の跡が現れます。これは、電子が波ではなく粒子である証拠ではないか!と思うわけですが、もう少し我慢していると、c位でうっすらと模様のようなものが感じられ、d, eと進むと干渉縞が明瞭に現れてきます。

さあ、波なのか粒なのか、一体どう考えれば良いのでしょうか。ここで、量子力学の暫定的な(というのは、神学論議は適当にして前に進もう、というBohr先生の精神の表れだと思いますが)解釈である「コペンハーゲン解釈」によれば、次のようになります\*1。我々は、波動関数(1)を知っていても、これが表す粒子の位置座標を測定したとき、どのような値が測定されるか完全に予言することはできません。しかし、非常に多数回の測定をした時、位置 $\mathbf{r}$ で粒子を観測する確率は $|f(\mathbf{r}, t)|^2 = A^2(\mathbf{r}, t)$ で表されます。すなわち、スクリーン上で位置を測定するまでは波動ですが、測定(観測)をした途端に、位置が決まった粒子になってしまうわけです。しかし、どの位置で観測されるか、という確率は波動の性質を持っていて、波動関数の振幅の2乗 $A^2(\mathbf{r}, t)$ となるため、多数回の測定をすると波動の性質が現れます。

\*1 量子力学の解釈問題については、例えば、[2]などが易しく書かれています。

## 1.4 電気伝導

これでわかりました。たくさんの電子について同じ測定を繰り返して統計を取れば、波動としての性質が現れるでしょう。電気伝導実験は、たくさんの電子が固体中をどのように流れるかを調べるものですから、これにはうってつけです。

しかし、事はそう簡単ではありません。電気伝導の実験は小学校以来やってきたと思いますが、波の性質なんて見えなっけ？と思われるでしょう。そう、実はまだまだ結構大変です。波の性質が現れるには色々と条件があります。図2の外村博士の実験は、真空中に電子を飛ばしていましたから、電子は散乱されることなく遮蔽板<sup>\*2</sup>やスクリーンに当たっていました。この実験の凄いところの1つは、飛ばしている電子の運動量を非常に良くそろえていることです。その事情を考えてみましょう。

粒と波をつなぐものとして、de Broglie の関係式

$$mv = p = \hbar k = \frac{h}{\lambda} \quad (2)$$

があります。  $mv = p$  はおなじみ運動量、  $k$  は波数、  $\lambda$  は波長、  $h$  は Planck の定数、  $\hbar = h/2\pi$  です。スリットの間隔を  $d$ 、遮蔽板とスクリーンの距離を  $l$  と置くと、スクリーン上の干渉縞の間隔は  $d \ll l$  とすると、  $\lambda/d$  となります。(2) の式から、運動量が電子ごとにばらばらだと干渉縞の間隔がばらついて、波の性質は見かけ上消えてしまいます。

ただし、電気伝導を担う電子には、運動エネルギーをそろえる仕組みがあります。これは、電子が1つの状態に1個しか入ることができない、という **Fermi 粒子** と呼ばれる性質があるからです。このために、電気を運ぶ電子のエネルギーは、**Fermi エネルギー** と呼ばれるエネルギーを中心に分布することになります。この分布の幅ですが、ほぼ熱エネルギー  $k_B T$  です ( $k_B$  は Boltzmann 定数、 $T$  は温度)。従って、運動エネルギーをそろえるには、**対象となる物質をうんと冷やして低温にしてやらなければなりません**。

もう一つ難しい点は、物質中では真空中と違って電子が絶え間なく散乱されている、という問題です。このために、物質中を走る電子は一定距離を走ると波動としての性質を失ってしまいます。この距離を**位相緩和長**と呼びます。従って、物質中で例えば2重スリット実験をやろうと思ったら、この距離よりも小さい中に実験系を作りこまなくてはなりません。位相緩和長は、まず温度によります。温度を下げると、温度の逆数、あるいは温度の2乗の逆数などで長くなります。それでも、液体ヘリウム温度(絶対温度 4.2K) やそれ以下でようやく  $1 \mu\text{m}$  に達するかどうか、です。従って、やはり対象物を冷やすのと同時に、**対象物の中に大変小さな実験系を組み立てなければならない**、こととなります。

勝本研究室で日々行われている研究のかなりの部分は、このようなしなかけを用いたものです。本プログラムでもその一部を紹介します。が、主に行う2つの実験は、低温は使用しますが、少し違うアプローチを使います。以下、個別に説明していきましょう。

## 2 超伝導現象

### 2.1 超伝導とはどんな状態か

超伝導、というと、電気抵抗がゼロになったり、磁石が浮き上がったたり、というわかりやすい現象を思い浮かべられるでしょう。この超伝導現象を人間にわかりやすい形で解明したのが **Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS) 理論** [3] です。超伝導状態では、かなりの数の電子が **Cooper 対** と呼ばれるペアを作ります。Cooper 対は、運動量  $\mathbf{p}$  の電子と  $-\mathbf{p}$  の電子とでできますので、その重心の運動量はほぼゼロ、ということになります。そこで、Cooper 対の重心に関して式(2)を適用すると、その波長は大変長いこととなります。そして超伝導状態とは、一口に言って、「**たくさんの Cooper 対の波動が揃って運動している状態**」のことです [4]。たくさんの波動関数の位相がそろえることから、「ゲージ対称性が破れている」と言うこともあります。

<sup>\*2</sup> 実際の実験では電子レンズを用いています。

これは、なかなか大変なことです。たくさんの Cooper 対がただ一つの波動関数

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\rho} \exp[i\theta(\mathbf{r}, t)] \quad (3)$$

で表されてしまう、ということです。ここで、振幅を  $\sqrt{\rho}$  と書いたのは、2乗した時に Cooper 対密度  $\rho$  が出てくるようにしたのと、 $\rho$  に空間座標依存性がある、ということは電荷の空間的な偏りがある、ということになりますので、電気エネルギーが大変大きくなり、そのような状態は実際には実現しない、ということで、空間座標および時間に対して一様(依存しない)、としました。上で、「Cooper 対密度」と書いてしまいました。そう、波動関数の振幅の2乗は確率密度だったはずでしたが、何しろ猛烈な数の Cooper 対が (3) に従っているのです。ある座標位置  $\mathbf{r}$  に Cooper 対がいるかどうか、という測定をすれば、一回で大量の Cooper 対が引っかかってくるはずで、つまり、図2でたくさんの測定を積み重ねて描いた波動関数の様子が、一回の測定で得られることになります。この意味で、(3) をマクロ波動関数などと呼びます。ある意味、確率密度としての波動関数の性質が失われ、文字通り (de Broglie などが最初に考えた意味での) 物質波になってしまった、と考えることができます。

本プログラムでも、この性質を使って量子力学をあたかも目で見ると感じてもらおうというわけです。

## 2.2 Josephson 接合

Josephson 接合は、2つの超伝導体で薄い絶縁体を挟んだ構造のものを言います。図3にその模式図を示しています。まず、両側が超伝導ではなく普通の金属状態の場合、絶縁体は通常電気を通しません。しかし、その厚さが非常に薄くなると、量子力学のトンネル効果によって電子が透過するようになります。この時、接合にかかる電流と電圧との間には比例関係、すなわちオームの法則が成り立ちます<sup>\*3</sup>。絶縁体の両側の金属が超伝導になったらどうなるでしょうか？

ここで、(3) のマクロ波動関数が平面波、

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\rho} \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] \quad (4)$$

の場合を考えましょう。 $\omega$  は角振動数です。それから (2) と並んで量子力学の基礎となった Einstein の関係式、

$$E = \frac{p^2}{2m} = h\nu = \hbar\omega \quad (5)$$

を思い出しましょう ( $E$ : 運動エネルギー,  $p$ : 運動量,  $m$ : 粒子の質量)。 (2) と合わせると、 $\omega = \hbar k^2 / 2m$  となりますから、(4) が運ぶ物質の流れ (の密度) は、群速度を  $v_g$  として

$$\mathbf{j}_m = \rho \mathbf{v}_g = \rho \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} = \rho \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} \left( \frac{\hbar \mathbf{k}^2}{2m} \right) = \frac{\hbar \rho}{m} \mathbf{k} \quad (6)$$

となります。一方、(4) は、マクロ波動関数の表式 (3) で、 $\theta(\mathbf{r}, t) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t$  ですから、 $\mathbf{k} = \partial \theta / \partial \mathbf{r} = \nabla \theta$  となり、形式的に

$$\mathbf{j}_m = \frac{\hbar \rho}{m} \nabla \theta, \quad \mathbf{j} = \frac{2e\hbar \rho}{m} \nabla \theta \quad (7)$$

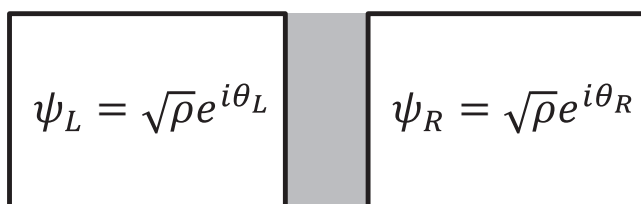


図3 Josephson 接合の模式図。

<sup>\*3</sup> これは最も単純な場合で、実際には物質により様々な特性が現れます。

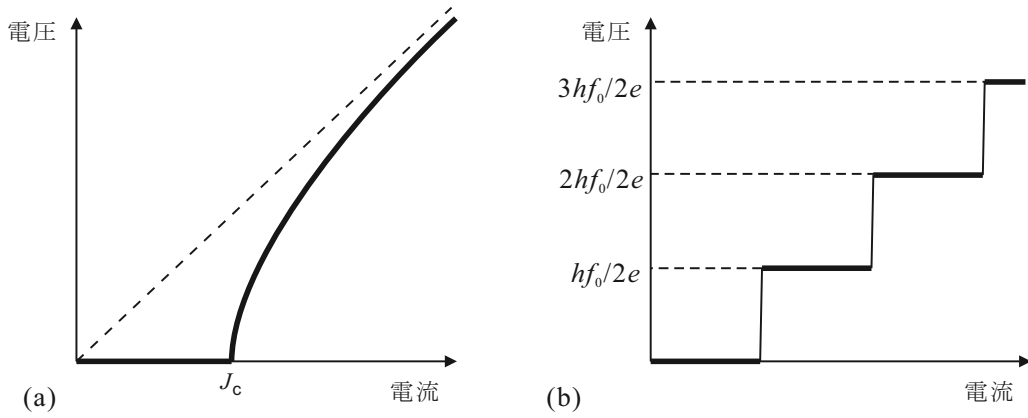


図4 (a) Josephson 接合の電流電圧特性例を模式的に描いたもの. (b) 周波数  $f$  の高周波によってロッキングが生じた Shapiro ステップ状態.

であることがわかります.  $j$  は電流密度です. これは今, 平面波について見たわけですが,  $|\psi|^2$  の流れを考えると, 一般的に成立する式であることを示すことができます\*4. すなわち, 超伝導体中の Cooper 対の流れは, その位相の空間微分に比例する, ということです.

では, 図3の Josephson 接合の場合はどうなるでしょうか. 図で, 右と左の超伝導体の位相はそれぞれ,  $\theta_R, \theta_L$  で, 一致していない場合もあるでしょう. その差を  $\Delta\theta = \theta_L - \theta_R$  とし, 絶縁体の厚みを  $d$  とすると,  $\Delta\theta/d$  だけの空間微分があることになります. ただし, 絶縁体中は超伝導体からは量子トンネルによって Cooper 対波動関数がしみ出している状態ですので, 距離に対して指数関数的に振幅が減衰しています. このような場合には, 電流は  $\Delta\theta$  に比例するのではなく ( $\Delta\theta$  が小さければ同じですが), その  $\sin$  に比例することが示せます. すなわち

$$j = j_c \sin \Delta\theta \quad (8)$$

です. 位相で  $2\pi$  以上のずれは意味がありませんので,  $2\pi$  の周期関数になることは首肯できることです.  $j_c$  は簡単に係数として置いたものですが, その実際的に意味するところはおわかりでしょう.  $\sin$  関数は最大で 1 なので, Josephson 接合にはこれ以上の電流 (密度の電流) を流すことができません. これを**臨界電流**と呼び, 臨界電流を流す位相差はちょうど  $\pi/2$  ということになります. (8) のように, トンネル電流に超伝導が現れることを**直流 Josephson 効果**と呼びます.

図4(a)に Josephson 接合の電流電圧特性の例を模式的に示しました.  $J_c$  ( $j_c$  を接合面積で積分したもの) までは電圧ゼロの超伝導電流が流れますが,  $J_c$  を超えると電圧が生じ, 接合が超伝導でないときの値 (オームの法則) に漸近します. 接合の条件によってはオームの法則の線にジャンプアップする場合もあり, このような場合の多くで, 電流の増減に対して行きと帰りで違う道をたどるヒステリシス現象が見られます.

さて, 電流が  $J_c$  を超えて有限電圧  $V$  が生じている時, 超伝導には何が生じているでしょうか. Josephson 接合図3をキャパシタ (日本の高校物理の呼び方ではコンデンサ) だと見れば,  $2e$  の電荷をもつ Cooper 対が電極間を移動すると,  $2eV$  だけのエネルギー変化があります. 左と右の超伝導マクロ波動関数の角振動数を  $\omega_L, \omega_R$  とすると, (5) より,

$$2eV = \Delta E = \hbar(\omega_L - \omega_R) \quad (9)$$

となり, 左右で角振動数が異なることになります. すなわち, 位相差  $\Delta\theta$  が一定ではなく,  $(\omega_L - \omega_R)t$  で変化することになります. (8) より, 位相の定数項は時間の原点を取り直して消してしまえば,

$$J = J_c \sin[(\omega_L - \omega_R)t] = J_c \sin\left(\frac{2eV}{\hbar}t\right) \quad (10)$$

となり, 周波数  $2eV/\hbar$  で電流が振動することになります. これを**交流ジョセフソン効果**と言います.

\*4 量子力学の教科書なら何でもよいのですが, 例えば, [5] などを見てください.

ここに、外部から周波数  $f_0$  の電磁波を印可したとします。ここから先は、簡単な説明はできない、というのは、式 (8) のサイン項に起因する微分方程式の非線形性が主役となる現象だからです。ですが、結果は大変簡単で、非線形現象特有の引き込み現象により周波数  $f = 2eV/h$  が  $f_0$  の整数倍にロックされてしまいます。今、測定されているのは電圧  $V$  なので、これは、電圧が次のように量子化されることを意味します。

$$V = n \frac{hf_0}{2e}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (11)$$

実際には、図 4(b) のように、電流電圧特性に階段が現れ、この高さが正確に  $hf_0/2e$  の整数倍になっています。この階段を **Shapiro ステップ** と呼んでいます。非常に長い話になりましたが、超伝導が量子力学がマクロスケールで現れる現象であること、これを電気伝導で調べることができること、が端的に現れた現象であると思います。本プログラムでも皆さんにこの実験をやっていただく予定です。

## 2.3 超伝導量子干渉素子 (SQUID)

次に、超伝導体を輪の形状にしてみましょう。皆さんは、量子力学による水素原子のエネルギー構造解明は、非常に単純化すれば波動関数の空間的一価性、すなわち一周回れば元に戻らなければならないという条件から波の波長従ってエネルギーが離散化するというところだった、というのをご記憶でしょうか。超伝導がマクロ波動関数状態だ、と考えれば、輪にした超伝導体はマクロな原子と見ることができるでしょう。

ここでは、超伝導体の輪は十分太い、とします。何に比べてか・・・とここでまた説明が大変な事柄が出てきてしまいました。皆さんは浮き磁石の現象を説明するのに **Meissner 効果** というのをお聞きになっていると思います。超伝導になると磁場をみな超伝導体の外に排除してしまうという効果です。この時、超伝導体の表面に近いところだけは磁場が入り込んでいて、ここに超伝導電流が流れています。この電流が作る磁場によって内部の磁束を排除してしまうのです。この磁場が入り込んでいる深さを**磁場の侵入長**といいます。上で「十分太い」と言ったのは侵入長に比べて十分太い、ということです。温度を上げて超伝導が消えると金属の輪に戻ります。この状態で外部から磁場を印可しておき、再度冷やして超伝導にしたら、何が生じるか、がここで考えたいことです。

そこで、電磁場中の古典的荷電粒子の運動について復習しておく、と、電荷  $q$  の粒子には **Lorentz 力**

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (12)$$

が働くのでした。 $\mathbf{E}$  は電場、 $\mathbf{B}$  は磁束密度です。ここで、ベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  を導入すると、 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  ですから、

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A}$$

となります。1つの粒子について、その「粒子の位置でのベクトルポテンシャル」を  $\mathbf{A}_p$  のように書くことにすると、上の式での  $\mathbf{A}$  は  $\mathbf{A}_p$  に他ならず、

$$\frac{d\mathbf{A}_p}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot (\nabla \mathbf{A})_p = \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{A}$$

ですから、

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} + q\mathbf{A}_p, \quad \varphi = q(\phi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) \quad (13)$$

と置くと、運動方程式

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

は、標準形

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \nabla\varphi \quad (14)$$

にかけることができます。これなら形式的に波動に移行することができます。すなわち、古典力学の運動方程式がこの形にかけるということは、波動力学に移行する際に、位相の中に入っていた運動量  $\hbar\mathbf{k}$  の部分を、この運動量のようなもの (**正準運動量**と呼びます)  $\mathbf{p}$  で置き換えた波を考え、これが、ポテンシャル  $\varphi$  の中を伝播する問題を考えれば良いことになります。

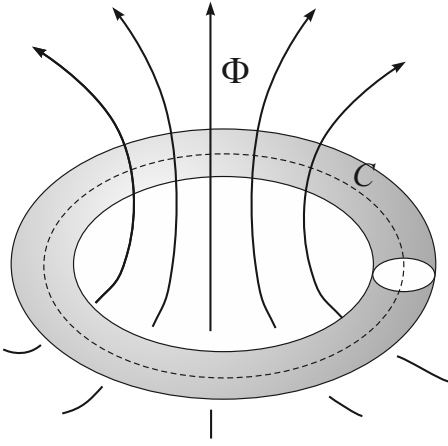


図5 超伝導リング(グレー部分)を磁束  $\Phi$  が貫く様子の模式図.  $C$  が Meissner 効果によって磁場が遮蔽されて電流が流れていない部分に考えた閉曲線.

そこで、この波動がやはり超伝導によってマクロ波動関数になったとしましょう。磁場がかかっている、粒子の動きは  $\hbar\mathbf{k}/m$  であることに変わりがないので、 $\nabla\theta$  を取ると  $q\mathbf{A}$  の項が生じてこれを差し引いておかなければいけませんので、(7) は、

$$\mathbf{j} = \frac{2e\rho}{m}(\hbar\nabla\theta - 2e\mathbf{A}) \quad (15)$$

のように書き換えられます。

またもや回り道が大変でしたが、超伝導リングの問題に戻りましょう。リングは先に言ったような意味で十分に太く、したがってリング断面の十分内側には磁場は入り込んでおらず、電流も流れていません。図5のように、このような電流の流れていない領域にリングに沿って円弧を描くことができるはずですが、式(15)の  $\mathbf{j} = 0$  ですから、これをこの円弧上で一周積分しても当然ゼロです。すなわち、係数  $2e\rho/m$  は最初から略し、

$$\begin{aligned} \oint_C (\hbar\nabla\theta - 2e\mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s} &= \hbar\Delta\theta_C - 2e \int_S \text{rot}\mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma} \\ &= \hbar(2\pi n) - 2e \int_S \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = nh - 2e\Phi = 0, \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (16a)$$

$$\therefore \Phi = n \frac{h}{2e} \equiv n\Phi_0. \quad (16b)$$

最初の変形で、第1項、 $\Delta\theta_C$  と書いたのは、一周積分での位相の累積変化で、これは波動関数の空間的一価性より  $2\pi$  の整数倍になります。第2項ではベクトルの積分路に沿った成分の一周積分が、そのベクトルの回転 (rotation, curl) の面積積分になる、という Stokes の定理を用いています。ベクトルポテンシャル導入時の定義により、 $\text{rot}\mathbf{A}$  は磁束密度  $\mathbf{B}$  になりますので、その面積積分は、リングで囲まれた部分を貫く全磁束  $\Phi$  となります。さて、上の結果が意味するところは、驚くべきことに、超伝導リングを貫く磁束は、ユニバーサルな、すなわち各物質に固有の定数に依存しない  $h/2e$  という量<sup>\*5</sup>の整数倍に固定されてしまう、ということです。この  $h/2e$  を良く  $\Phi_0$  と書いて**磁束量子**と呼びます。

どうしてこのような量子化が起こるのでしょうか。後でも触れますが、金属でも(15)と同じようなことを考えることができますが、超伝導ではマクロな距離にコヒーレンスが成立するためリング全体がコヒーレントになること、非常に多数の Cooper 対が参加しているため、電磁場への「反作用」も強くなり、Meissner 効果として磁場を超伝導体内から完全に排除してしまうため、磁束が量子化せざるを得なくなるわけです。このように一旦磁束の量子化が起こると、この状態は外部磁場を切ったり、逆に増加させたりしても維持されます。これは、リング表面付近を流れる超伝導遮蔽電流によっているわけです。

すると、例えばリングの太さが磁場侵入長に比べて細いような場合は磁場を完全に排除できない分、磁束の量子化は不完全になります。これは、(15)で  $\mathbf{j} = 0$  となるような円弧路が取れないことに対応しております。その他の条件として、例えば、波動関数の空間的一価性により、周回すると位相変化は  $2n\pi$  というものがありました。電子1個

<sup>\*5</sup> と言っておいて何ですが、この分母の  $2e$  はもちろん、超伝導状態だからであり、常伝導状態では  $e$  になります。



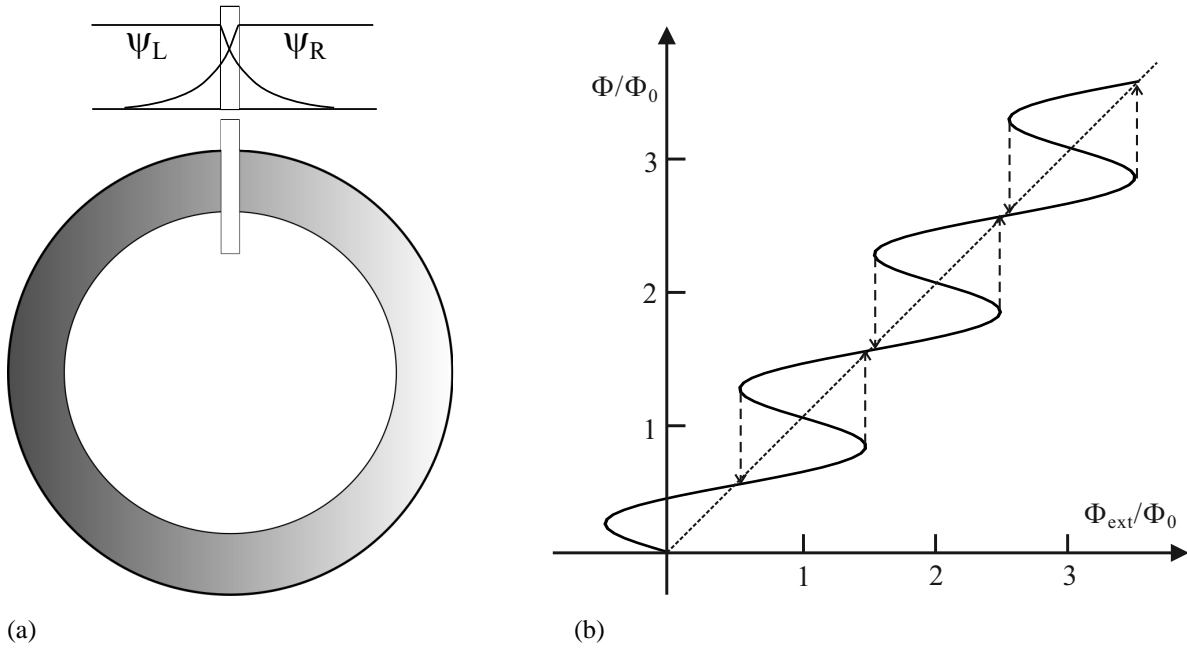


図 6 (a) 超伝導リングの一か所を Josephson 接合に置換した, SQUID 構造の模式図. 上の図は, Josephson 接合付近で左右から互いにマクロ波動関数がしみ出している様子の模式図. (b) 式 (18) で左辺を y 軸の関数として x 軸にプロットしたもの. 従って x 軸は  $\Phi_{\text{ext}}$ , y 軸は  $\Phi$  になる (単位は  $\Phi_0$ ).

の波動関数についても実はこれは本当か, という議論がありましたが (ゲージは決めなければいけません), 一価性を認める方向で結論されていると思います. 問題はマクロ波動関数の場合で, ゲージ対称性の破れにより多数の Cooper 対波動関数が揃っていることが一価性の根拠でした. では, 仮に多数でそろいはいしたものの, 2つの集合に分かれて, この2つのグループ間では位相がずれているような事態は考えられないでしょうか?\*<sup>6</sup> 一周が十分太くなっているような超伝導リングでは, このような状態はエネルギーが高くて実現しません. しかし, 図 6(a) のようにリングの1か所を切って, Josephson 接合にしたらどうでしょうか. 接合の片側で見ていると, 反対側のマクロ波動関数がトンネルでしみ出してきますので, ここに位相のずれがあれば「一周回での位相変化が  $2n\pi$ 」という条件が破れることとなります. 図 6(a) は超伝導量子干渉素子 (superconducting quantum interference device, SQUID) と呼ばれる素子の一種\*<sup>7</sup> です.

SQUID はリング状の導体ですから, コイルの一種だと考え, インダクタンス  $L$  を定義できます. SQUID に流れる電流を  $J$  とすると, これがリングの円環内につくる磁束を  $LJ$  と書くことができます. 外部磁場がリング内を作る磁束を  $\Phi_{\text{ext}}$  とすると,

$$\Phi = \Phi_{\text{ext}} + LJ. \quad (17)$$

一方, 接合部分の位相のずれ (一周回での  $2n\pi$  からのずれ) を  $\Delta\theta$  と置くと, (8) より,  $J = J_c \sin \Delta\theta$  と書けます. また, (16a) で  $2n\pi$  のところを  $2n\pi + \Delta\theta \equiv \varphi$  と置き換えて,  $\hbar\varphi - 2e\Phi = 0$ , すなわち,  $\varphi = \frac{2e}{\hbar}\Phi = 2\pi\frac{\Phi}{\Phi_0}$  となり, (17) に代入して

$$\Phi - LJ_c \sin\left(2\pi\frac{\Phi}{\Phi_0}\right) = \Phi_{\text{ext}}, \quad (18)$$

ここで,  $\Phi$  に関係する項を左辺に集めました. この様子を, 図 6(b) に描きました.  $\Phi_{\text{ext}}$  は外部磁場に比例していますが, リングを貫く磁束  $\Phi$  は矢印で示したように, すり減った階段状に増加/減少し, 不完全な量子化が生じていることがわかります. また, 外部磁場の増加/減少に対して,  $\Phi$  は行きと帰り異なる経路を取る場合があることがわ

\*<sup>6</sup> 磁性体では, スピンの空間回転の対称性が破れて一方向の磁化が発生しています. しかし, 大きな磁性体では中が磁区に分かれていて, 磁区内ではスピンの向きはそろっていますが, 磁区同士は一般に異なる向きにそろっています. 平たく言えば超伝導の場合にこのような事態を生じさせたものが SQUID です.

\*<sup>7</sup> このように, 1か所に接合を入れた構造を, 高周波応答に使用することが多いことから, 良く rf-SQUID と呼びます (rf は radio frequency の略). これに対して, 2か所に接合を入れ, 伝導を測定できる端子を付けた構造を dc-SQUID と呼ぶことが多いです.

かります。本プログラムの実験では、これを使って外部磁場による磁束の変化を磁束量子単位で測定(というより観察)することを行います。

### 3 半導体超構造

超伝導によって生じたマクロ波動関数の例を見てきましたが、Sec.1でも述べたように、マクロ波動関数でなくても、多数の電子が同じ量子状態を経由して伝播する伝導現象を調べることで、量子現象を見ることができます。

#### 3.1 2重障壁構造

このような実験に最適なのが、異なる種類の半導体を貼り合わせた**ヘテロ接合**と呼ばれるものです。これも、超伝導と同じく、半導体とは何か、から始めていると、とんでもなく長い解説が必要です [6]。超伝導同様に思い切り簡単化して解説したいと思います。

絶縁体の特徴づけるパラメーターとして、Fermi エネルギー (4 ページ) 付近のバンドギャップ-すなわち電子のエネルギー準位が存在しないエネルギー帯、があります。半導体は、このバンドギャップが比較的小さなものを指します。半導体の中の伝導を担う粒子は、やはり電子ではありますが、半導体結晶を構成する原子の影響で、その運動方程式に入る質量の値が変化します。これを**有効質量**と呼びます\*8。また、あたかも正の電荷を持った粒子が走っているかのように見えることがあります。これを理論的には電子の抜けた孔-**正孔**が走っていると表現することができます。

A と B という2つの半導体があって、これらのバンドギャップがそれぞれ  $E_{gA}$ ,  $E_{gB}$  であったとします。これらを貼り合わせてヘテロ接合を作ると、これらのバンドギャップがエネルギー軸上でどのように並ぶかは物質の組み合わせによって変わりますが、よくあるケースとして、 $E_{gB} > E_{gA}$  であったとすると、この半導体の中を運動する電子(あるいは正孔)にとって、半導体 B は有限の高さを持ったポテンシャル障壁として働きます。そこで、図 7(a)のように、A, B を薄い層にして、A-B-A-B-A と積層してみます。B 層は障壁なわけですから、ここに電子の波がやってくると、これは、(b)のように、2枚のつい立てを立てたようなポテンシャルを感じるようになります。

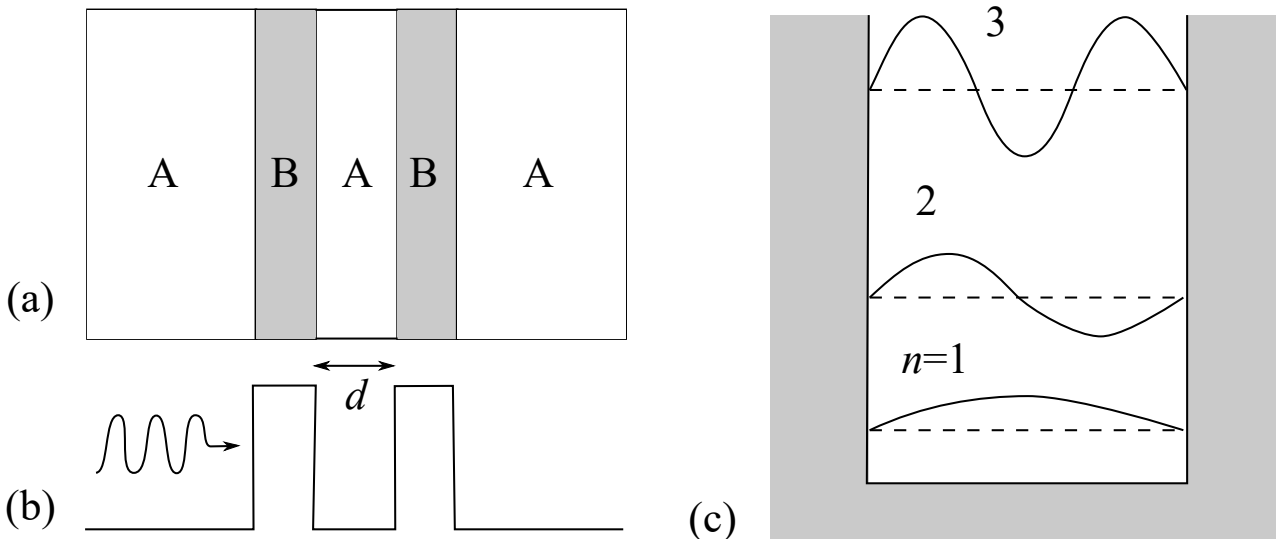
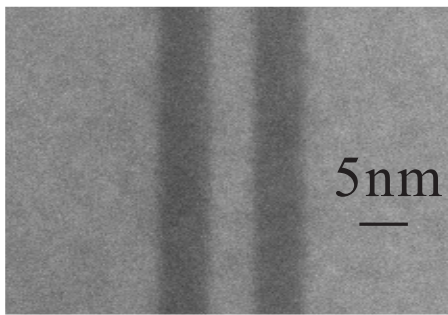
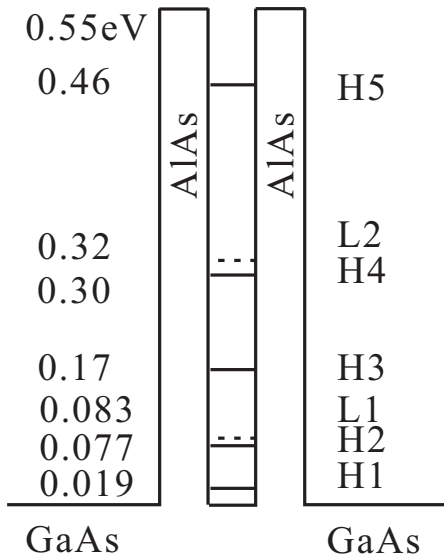
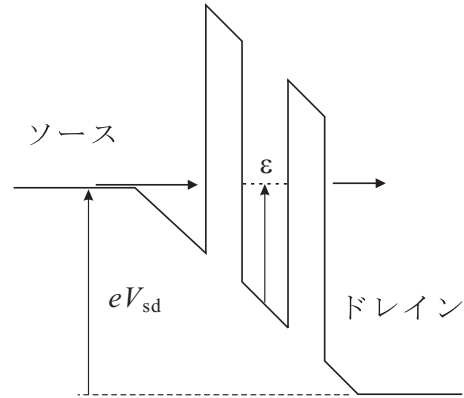


図 7 (a) A, B 2つの半導体を、薄い B 層 2つが 2重の障壁になるように挟んだ構造。(b) (a) の構造が、半導体中を伝播する電子の波にとってどのように感じられるか、ポテンシャル障壁を描いたもの。(c) 2つのポテンシャル障壁に挟まれた「量子井戸」の中で、波が定在波となることで波数が離散化し、エネルギーが離散化する様子を描いたもの。

\*8 これは金属でも同じですが、これまでは  $m$  などと書いてあまり意識しませんでした。また、Cooper 対になると、当然 2 倍になります。



(a)



(b)

図 8 (a) 上：二重障壁の正孔ポテンシャルダイアグラム．GaAs の価電子帯の上端を基準にとり，正孔のエネルギーを上向きにしています．H1 - H5, L1, L2 はそれぞれ重い正孔，軽い正孔について計算された共鳴準位の位置．下：試料の走査透過電子顕微鏡写真．AlAs の部分が黒く見えています．(b) ソースドレイン電圧がかかった場合のポテンシャル模式図．

このつい立ての間隔を  $d$  としましょう．つい立ての間に入り込んだ電子の波について考えます．実際にはつい立ての高さも厚さも有限ですから，やがて電子はトンネル効果により外部に逃げ出してしまいますが，簡単のために，逃げ出し効果は無視できるとしてみましょう．すると，電子は 2 つのつい立ての間を反射を繰り返して伝播し，後ろからやってくる自分自身と干渉効果を起こすことになります．これは，両端を固定端とする長さの決まった媒体を伝播する波の問題で，図 7(c) のように定在波状態が生じます．弦楽器だと，主音とハーモニクスに相当しています．図からわかるように，定在波条件は，波長  $\lambda$ ，波数  $k$  として，

$$d = n \frac{\lambda}{2} = n \frac{\pi}{k} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (19)$$

です．このように，つい立ての間では波数が量子化し，これに伴い，式 (5) より，運動エネルギーも

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} n^2 \left(\frac{\pi}{d}\right)^2 = \frac{h^2}{8md^2} n^2 \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (20)$$

と量子化します．

最初に戻って，図 7(b) で電子が A を通って B のつい立の間（もう少し物理らしく量子井戸と呼ぶことにしましょう）に入ってやがて反対側の A へ抜ける過程を考えると，量子井戸内に状態が存在する (20) のエネルギーの電子が透過確率が高そうである，と想像がつくでしょう．実際，条件は障壁の有限性によってシフトはしますが，(20) に近いエネルギーで電子が共鳴的に量子井戸を通過し，透過確率が 1 になることをきちんとした量子力学的計算によって確認することができます．

図 8 は，実際にこのような構造を作って実験する様子を示したものです．A に GaAs, B に AlAs という半導体を用いています．また，電気を運ぶ担体は，この場合，正孔を使っています．今の場合，正孔には面倒な（面白い？）点があり，有効質量の異なる 2 種類の正孔（重い正孔，軽い正孔）が存在しています．(20) からわかるように，有効質量

によって共鳴位置も異なりますので、井戸の中に性質の違う共鳴状態がいくつか現れることになります。入射する正孔のエネルギー調整は、図 8(b) のように、素子に加える電圧で行います。

### 3.2 量子 Hall 効果

前節で電子が入ってきたり、漏れ出ていく確率のある量子井戸について見てみました。その際も、図 7(a) で左右の A 領域がなく、完全に井戸に閉じ込められた場合について考えました。このような系では、障壁に垂直方向の運動エネルギーが (20) のように量子化し、こちらの方向には電子は動けなくなります。では、電子は止まってしまうのか、というと、衝突に平行な方向には動くことができます。すなわち、量子井戸、と言っても積層平面に平行な方向は動くことができる 2 次元構造になっています。そこで、実際、(20) で  $n = 1$  の状態だけ電子が占有するように Fermi エネルギーを調節することで、**2 次元電子**を作り出すことができます。ここで最後に紹介する**量子ホール効果**は、このような 2 次元電子系を舞台に現れる、顕著な量子効果であり、昨今固体物理学の世界で隆盛を極める固体中のトポロジに起因する現象の最も著しい例でもあります。量子 Hall 効果のちゃんとした説明はまた非常に大変なので、例によって大まかな話でご勘弁いただくことにして、実際に量子 Hall 効果を測定してもらいます。

まず、普通の Hall 効果から行きましょう。ある固体の電気抵抗を調べる時、最も粗くはこの固体にテスターの針を当てて抵抗値を調べます。しかしこれでは、針と固体との間の接触部分の抵抗も一緒に測ってしまい、正確な値が得られません。そこで、図 9(a) のような形に試料を切り出し、端子  $t_1, t_2$  の間に電流を流し、端子  $x_1, x_2$  の間の電圧を測定します。この時、電圧は極力電流を取らない形で測定すれば、 $x_1, x_2$  での接触抵抗による電圧降下は無視でき、測定電流はほぼすべて  $t_2$  から流れ出るのでこちらで測定をすれば、電圧、電流ともに正確に測定でき、固体本来の電気抵抗を測定できます。この時、図のように  $x$  端子の反対側に  $y_1$  端子を付けておき、 $x_1, y_1$  の間で電圧を測定すると、 $x_1$ - $y_1$  を結ぶ線が電流に直交していれば、等電位線上にあるわけですから測定される電圧はゼロになります。

ここで、図 9 で紙面に垂直に磁場 (磁束密度)  $B$  を加えてみましょう。試料を流れる電荷担体 (電荷  $q$ ) には式 (12) で表される Lorentz 力が加わります。今、 $t_1 \rightarrow t_2$  と移動する担体には、 $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  の項によって電流と垂直方向に力がかかって横向きにも動き出そうとします。試料に端がなければ、高校物理でもおなじみ**サイクロトロン運動**を始めるはずですが<sup>9)</sup>。その半径と角振動数は、

$$r_c = \frac{mv}{|q|B}, \quad \omega_c = \frac{|q|B}{m} \quad (21)$$

です。磁場が弱ければ  $r_c$  は大きく、Lorentz 力は担体を図 9(b) のように試料端に押し付け、端に電荷が溜まることになります。この電荷が新たな電場を生じ、図のように磁場による力と釣り合ったところで電荷の溜まりが止まり

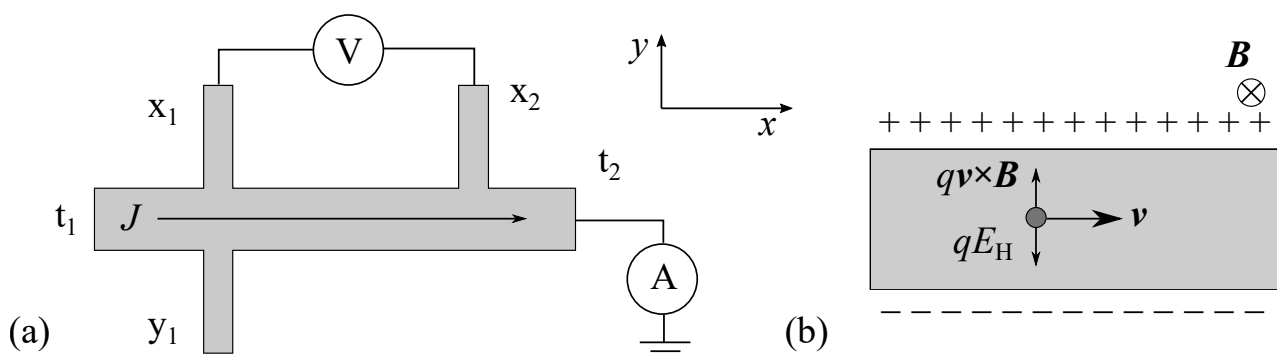


図 9 (a) 電気抵抗の 4 端子測定法。丸に A は電流計、丸に V は電圧計を表します。(b) 紙面に垂直に磁場 (磁束密度  $B$ ) を印可した場合。試料端に溜った電荷による電場からの力と、磁場による力が釣り合い、 $x$  方向に担体が流れます。

<sup>9)</sup> 本当は、ここでも微妙な問題があり、我々が担体として認識する電子または正孔は電流が流れていないときでも止まっているわけではなく Fermi エネルギー程度の運動エネルギーを持ち運動していますので、(12) の  $\mathbf{v}$  にはその速度が入るはずですが、ここでは、電流と電荷密度から計算される大変遅い速度を考えることにします。正確には統計力学的計算により、遅い速度を考えた場合に近い結果が得られます。

ます。

この電流に垂直方向の電場を Hall 電場と呼びます。これを  $E_H$  としましょう。  $v$  の見積もりとして、電流密度を  $j$ 、電荷担体密度を  $\rho$  とし、  $v = j/q\rho$  と与えましょう。すると、釣り合い条件より

$$E_H = vB = \frac{j}{q\rho}B, \quad R_H \equiv \frac{E_H}{jB} = \frac{1}{q\rho} \quad (22)$$

が得られます。  $E_H$  の表式から、これが電流と磁場に比例することがわかります。  $E_H/j$  は抵抗 (率) の次元を持ち、Hall 抵抗と呼ばれます。これは磁場に比例して増加します。比例係数  $R_H$  は Hall 係数と呼ばれ、式 (22) より、担体の持つ電荷と密度で決まっています。実際、電気伝導を担っているのが電子なのか正孔なのか、またその密度はどうなのか、ということ調べるのに Hall 測定が良く使用されます。

さて、磁場が強くなってくると、(21) で  $r_c$  が小さくなり、  $\omega_c$  が大きくなるわけですが、試料端はもちろん、現実の系の中には沢山ある散乱もかいくぐってサイクロトロン円運動が生じるようになります。散乱の平均時間間隔を  $\tau$  とすると、  $\omega_c\tau$  が 1 より十分大きくなれば、電子はほとんど円運動をしていると考えて良くなります。この円運動をしている電子について考えてみると、超伝導の時に考えた (13) の正準運動量の概念などはそのまま使用することができます。サイクロトロン円一周分を考え、電子の波動関数位相変化は

$$\Delta\theta = \frac{1}{\hbar} \oint_C \mathbf{p} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{\hbar} \oint_C (m\mathbf{v} + e\mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{\hbar} (2\pi r_c m v + e\pi r_c^2 B) = \frac{\pi r_c^2 |e| B}{\hbar} = 2\pi \frac{\phi}{\phi_0} \left( \phi_0 \equiv \frac{h}{|e|} \right) \quad (23)$$

となります。  $\phi_0$  は超伝導の場合と同じく磁束量子と呼ばれますが、超伝導の  $2|e|$  の場合 (これまであまり  $e$  の符号は意識していませんでしたが、ここでは、  $r_c$  の標記に絶対値を使った関係で  $|e|$  としてみました) と区別するため、小文字標記にしてみました。  $\phi$  も同様で、サイクロトロン円を貫く全磁束です。今度は波動関数の一価性により、  $\Delta\theta = 2n\pi$  ですから、

$$\phi = n\phi_0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (24)$$

と、形式的に (16b) と同じ式が成立することがわかります。ただし、物理的にはかなり意味合いが異なります。(16b) はすでに述べたように、リングを流れる遮蔽電流によってリングを貫く磁束が磁束量子の整数倍に固定されたもので、外部磁場を変化させても変化がありません。これに対して、(24) は与えられた外部磁場に対して、サイクロトロン軌道が (24) となるようなものに量子化されてしまうことを意味します。超伝導リングの冒頭で述べたように、サイクロトロン軌道が一種の原子軌道のようになり、運動エネルギーの量子化が生じているわけです。最も単純に運動エネルギーを計算すると

$$E = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2} (\omega_c r_c)^2 = \frac{m\omega_c}{2\pi} \frac{|e|B}{m} (\pi r_c^2)$$

で、  $B \times (\pi r_c^2) = \phi = n\phi_0$  を使うと、

$$E_n = n\hbar\omega_c$$

が得られる。より正確な計算では、ゼロ点振動エネルギーが付き

$$E_n = \hbar\omega_c \left( n + \frac{1}{2} \right) \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (25)$$

となります。このようなサイクロトロン軌道の量子化の事を **Landau 量子化**と呼んでいます。

考えなければならないのは、このような量子化が生じているとき、Hall 抵抗がどのようになるか、です。まず、サイクロトロン運動している電子に電場を印可すると、サイクロトロン円は電場と垂直方向に動き出します。このことは、古典的な運動方程式 (14) を解いてみれば確認できます。実際には、このサイクロトロン円の運動は試料内の不純物ポテンシャルに捉えられて動けなくなってしまいます。しかし、試料の端だけは例外で、図 10(a) のように、試料の端に跳ね返りを繰り返しながら進む状態が存在します。このスキッピング軌道は、量子力学的にはエッジ状態として導くことができる 1 次元的な状態で、方向性 (カイラリティ) を持ち、後方散乱をほとんど生じないという特徴を持っています。

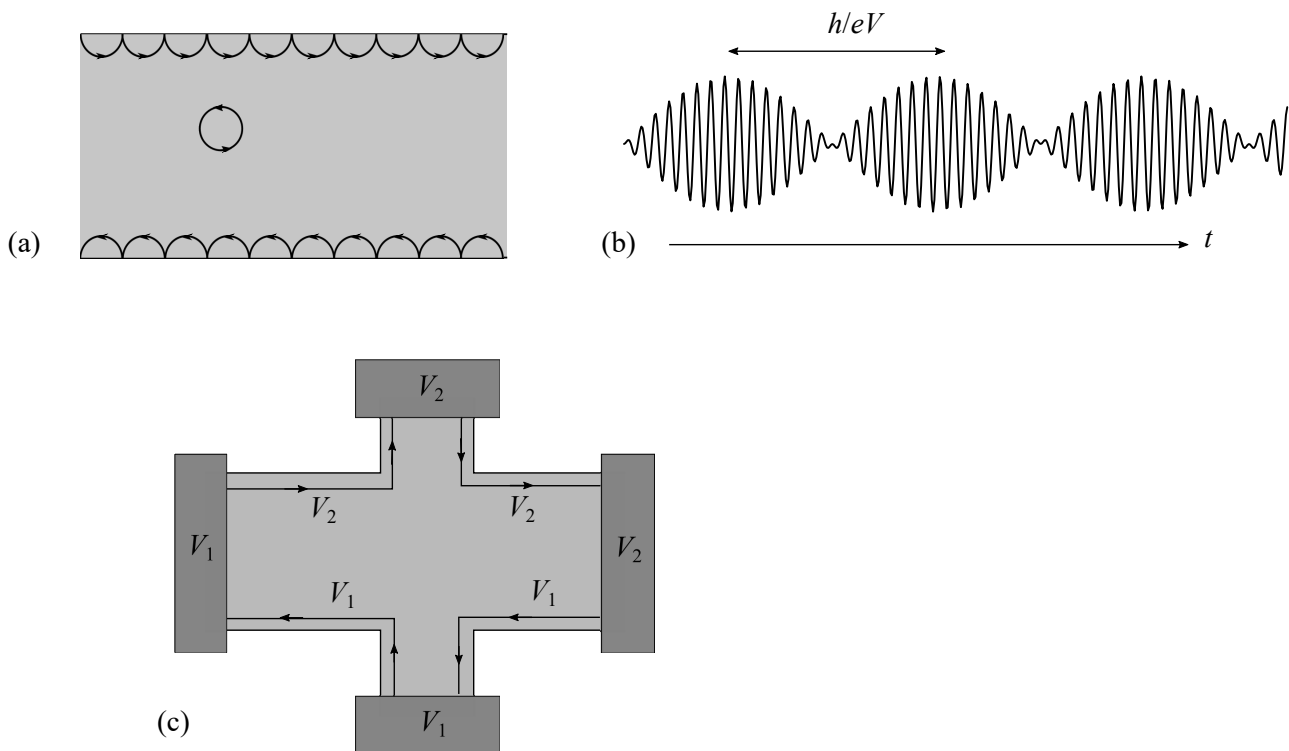


図 10 (a) サイクロトロン軌道が Landau 量子化するような条件の模式図. 2次元電子系内部ではサイクロトロン軌道は局在化して伝導に寄与しません. 試料の端を跳ねながら進む 1 次元的な軌道状態 (スキッピング軌道) が電流を運ぶことができます. (b) 1次元電子系に電圧  $V$  を加えて端からできるだけ電子を詰め込む作業を行う. 1つの「うなり」の山に 1 個 (スピン縮退しているときは 2 個) の電子を詰め込むことができ, この時のうなりの周期は  $h/eV$  となります.

このような 1 次元状態の電気抵抗はどれだけのしょうか. 言い換えるとここに電圧  $V$  を印可すると, どれだけの電流を流せるでしょう. 電子は Fermi 統計に従う粒子で, 1 つの量子状態は 1 個の電子で占有されてしまいます. 電圧  $V$  があると, 1 次元系の入り口に用意できる量子状態の「頻度」は図 10(b) の波のうなりの周期  $\tau = h/eV$  の逆数, ということになります. この頻度で電荷  $e$  を送ることができるわけですから, 電流は

$$J = \frac{eV}{h} \times e = \frac{e^2 V}{h}.$$

したがって, 1 個のエッジ状態の電気伝導度は

$$\frac{J}{V} = \frac{e^2}{h} \quad (26)$$

と極めて簡潔な形になります. これは, Landauer の公式と呼ばれるものの最も簡単な形です.  $e^2/h$  は伝導度量子と呼ばれています.

強磁場の下では, 図 10(c) のように, エッジ状態がカイラリティを持ち 2 手に分かれています. 結局  $V_1, V_2$  という電位の差をとり, また両エッジに流れる電流の差を取れば, 上と同じことになります. 結局, 量子 Hall 効果とは, Hall 抵抗の逆数, Hall 伝導度が, 伝導度量子の整数倍 (この整数は, 有効なエッジ状態の数) に量子化される現象といえます.

## 4 本プログラムで行う実験

### 4.1 2重障壁ダイオードの電流電圧特性

第 1 日目午後, 電気伝導の測定を始めましょう. 図 7 の 2 重障壁ダイオードが用意されています. 室温 (約 300 K), 液体窒素温度 (77 K), 液体ヘリウム温度 (4.2 K) でそれぞれ, 電流電圧特性を測定してみましょう.

電流ピークの位置を記録し、電極の大きな抵抗をオームの法則に従うものとして差し引くことで、ピークの同定を行うことを試みましょう（これは3日目までにできれば良いでしょう）。

## 4.2 Josephson 接合 (あるいは弱結合) 素子を使った実験

2日目午前中は、2.3節で説明した SQUID 素子を作ってみましょう。作り方は、その場で説明いたします。作った素子を液体ヘリウムで冷却し、図 6(b) に示した特性に起因する特徴的な信号波形 (三角波) が現れるかどうか調べましょう。三角波が現れたら、ヘリウム容器の外側で永久磁石を動かし、三角波にどのような変化が現れるか見てみましょう。

午後は、簡単な方法で作製した Josephson 接合の特性を調べます。ガラスデュワーに液体ヘリウムを汲み、ロータリーポンプで減圧することで 4.2 K から更に低温へ冷却していくことができます。この Josephson 接合は Sn(スズ) でできており、超伝導転移点は約 3.7 K です。超伝導転移すると、ゼロ抵抗が現れるはずですが、この付近で温度を止め、発振器からマイクロ波を印可し、図 4(b) の Shapiro ステップを観測しましょう。ステップの高さは、式 (11) のように量子化されています。周波数  $f$  は正確にわかりますので、ステップの高さから  $h/2|e|$  を求めることができます。

以上の実験が終わったら、更に減圧を進めて、液体ヘリウムの超流動転移点 2.17 K まで冷却してみましょう。沸騰している液体ヘリウムにどんなことが生じるか、web カメラを使って観察してみましょう。

## 4.3 量子 Hall 効果

3日目は、量子 Hall 効果を測定します。低磁場で電気抵抗を調べると、小さな振動が現れ、磁場と共に振幅が大きくなってきます。これを Shubunikov - de Haas 振動と呼びます。この振動と、Hall 係数から 2次元電子の濃度を独立に求めることができますので、後で比較してみることにしましょう。

更に磁場を増加していくと Hall 抵抗に階段構造、すなわち量子 Hall 効果が現れます。この時の Hall 抵抗を調べることで、(26) より、 $e^2/h$  の値を求めることができます。Shapiro ステップから求めた  $h/2|e|$  と合わせると、 $e$  および  $h$  の値を算出することができます。

これら、量子物理学の大きなステップを簡単な形で体験して、量子力学を「感じて」もらえれば幸いに思っています。

## 参考文献

- [1] 外村彰. 岩波講座 物理の世界 量子力学 〈1〉 量子力学への招待. 岩波書店, 11 2001.
- [2] コリン・ブルース. 量子力学の解釈問題 - 実験が示唆する「多世界」の实在 (ブルーバックス). 講談社, 5 2008.
- [3] J. Bardeen, L. N. Cooper, and J. R. Schrieffer. Theory of superconductivity. *Phys. Rev.*, Vol. 108, pp. 1175–1204, Dec 1957.
- [4] 勝本信吾. 岩波講座 物理の世界 物質科学の展開 〈1〉 超伝導と超流動. 岩波書店, 11 2005.
- [5] シッフ. 量子力学 (上) (物理学叢書 (2)). 吉岡書店, 新, 5 1970.
- [6] 勝本信吾. 半導体量子輸送物性 (新物理学シリーズ). 培風館, 12 2014.